Stabilità dei sistemi dinamici

Luigi Glielmo

Università del Sannio

glielmo@unisannio.it

September 28, 2016

Stabilità interna

Un sistema lineare è

- **asintoticamente stabile (a.s.)** quando la risposta libera tende asintoticamente a zero per qualunque stato iniziale x_0, cioè
$$\lim_{t \to \infty} \Phi(t)\, x_0 = 0 \quad \forall x_0$$
- **marginalmente stabile** quando non è a.s. ma comunque le traiettorie $\Phi(t)\, x_0$ restano limitate
- **instabile** negli altri casi; in altri termini esistono condizioni iniziali x_0 per le quali $\|\Phi(t)\, x_0\| \to \infty$ per $t \to \infty$

Da notare che
$$\text{a.s.} \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{t \to \infty} \Phi(t) = 0$$

Stabilità dei modi

Spesso si utilizza la stessa terminologia per qualificare i singoli **modi** del sistema, e si parla di modi a.s., marginalmente stabili o instabili, intendendo che la traiettoria goda della relativa proprietà con condizione iniziale scelta sull'opportuno autospazio.
Dal momento che, in generale,

$$\Phi(t)\,x_0 = \sum t^j e^{\alpha_i t}\left[\cos(\omega_i t)\,v_{ij} + \sin(\omega_i t)\,w_{ij}\right]$$

dove i vettori v_{ij}, W_{ij} dipendono da x_0, è evidente che **le caratteristiche di stabilità di un sistema sono le stesse del suo modo dominante**, cioè dell'autovalore (o autovalori) con parte reale α_i maggiore.

Stabilità e autovalori (t.c.)

Un sistema lineare t.c. è

- a.s. *se e solo se* il suo autovalore dominante giace a sinistra dell'asse immaginario
- marginalmente stabile *se e solo se* il suo autovalore dominante giace sull'asse immaginario ed è diagonalizzabile
- instabile *se e solo se* il suo autovalore dominante giace a destra dell'asse immaginario

Se l'autovalore dominante (supponiamolo il primo degli n) giace sull'asse immaginario ($\alpha_1 = 0$) e non è diagonalizzabile, allora il modo corrispondente avrà termini non limitati del tipo

$$\begin{array}{ll} t^j & \text{se } \omega_1 = 0 \\ t^j \left[\cos(\omega_1 t)\, v_{1j} + \sin(\omega_1 t)\, w_{1j}\right] & \text{se } \omega_1 \neq 0 \end{array}$$

con $j \geq 1$.

Stabilità e autovalori (t.d.)

Un sistema lineare t.d. è

- a.s. *se e solo se* il suo autovalore dominante giace all'interno della circonferenza unitaria
- marginalmente stabile *se e solo se* il suo autovalore dominante giace sulla circonferenza unitaria ed è diagonalizzabile
- instabile *se e solo se* il suo autovalore dominante giace all'esterno della circonferenza unitaria

Robustezza della stabilità

Gli autovalori di una matrice dipendono con continuità dagli elementi della matrice (piccole variazioni dei coefficienti $\Rightarrow$ piccole variazioni degli autovalori); quindi

Nota

Per un sistema a.s. la distanza dell'autovalore dominante dalla condizione di instabilità (l'asse immaginario o la circonferenza unitaria) dà una misura di quanto sia *robusta* la stabilità a fronte di **variazioni dei parametri**.

Stabilità e punti di equilibrio

Applicando un ingresso costante $\bar{u}$ i punti di equilibrio $\bar{x}$ sono le soluzioni di

$$0 = A\bar{x} + B\bar{u} \qquad \text{(t.c.)}$$
$$\bar{x} = A\bar{x} + B\bar{u} \qquad \text{(t.d.)}$$

L'utilità ingegneristica della stabilità è legata al seguente

Risultato

Un sistema lineare è a.s. *se e solo se* per ogni ingresso $\bar{u}$ esiste un unico stato di equilibrio $\bar{x}$ tale che $x(t) \to \bar{x}$ per qualunque x_0

Polinomi stabili

- **Polinomio di Hurwitz** Un polinomio con tutte radici a sinistra dell'asse immaginario
- **Polinomio di Schur** Un polinomio con tutte radici all'interno della circonferenza unitaria
- **Polinomio stabile** Hurwitz o Schur a seconda del contesto

Test sui polinomi (Hurwitz)

Polinomio monico

$$p(s) = s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_n$$

$$\boxed{p(s) \text{ è Hurwitz} \quad \Rightarrow \quad a_i > 0 \text{ per } i = 1, \ldots, n}$$

Esempio $s^3 - s^2 + s + 1$ certamente *non* è Hurwitz.

$$\boxed{a_1 > 0,\ a_2 > 0 \quad \Rightarrow \quad s^2 + a_1 s + a_2 \text{ è Hurwitz}}$$

Esempio $s^2 + s + 1$ è Hurwitz.

Per $n \geq 3$ occorre utilizzare il **criterio di Routh**

Esempio Per $n = 3$ deve aversi $a_1 a_2 > a_3$

Test sui polinomi (Schur)

Polinomio monico

$$q(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n$$

La trasformazione di variabili $z = \frac{s+1}{s-1}$ è tale che

$$|z| < 1 \quad \Leftrightarrow \quad \Re(s) < 0$$

e quindi

$$\boxed{q(z) \text{ è Schur} \quad \Leftrightarrow \quad p(s) = (s-1)^n \, q\left(\frac{s+1}{s-1}\right) \text{ è Hurwitz}}$$

Esempio $q(z) = z^2 - .25$ è Schur. Infatti

$$(s-1)^2 \left[\left(\frac{s+1}{s-1}\right)^2 - .25\right] = .75(s^2 + 3.33s + 1)$$

Stabilità delle interconnessioni

La **cascata** o il **parallelo** di sistemi è a.s. *se e solo se* sono a.s. i sistemi componenti (poiché gli autovalori del sistema complessivo sono gli autovalori dei sistemi componenti)
Per la retroazione non possono darsi regole generali.

Esempio [Retroazione di due sistemi del primo ordine]
Il sistema complessivo è descritto da

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -a_1 x_1 + b_1(u - x_2) \\ \dot{x}_2 &= -a_2 x_2 + b_2 x_1\end{aligned} \qquad A = \begin{pmatrix} -a_1 & -b_1 \\ b_2 & -a_2 \end{pmatrix}$$

Supponiamo $a_1, a_2, b_1, b_2 > 0$.
Polinomio caratteristico

$$s^2 + (a_1 + a_2)s + (a_1 a_2 + b_1 b_2) \quad \textbf{sempre Hurwitz}$$

Però se la reazione è positiva ($+$ al posto del $-$), il polinomio caratteristico diventa

$$s^2 + (a_1 + a_2)\, s + (a_1 a_2 - b_1 b_2)$$

e quindi

$$\text{a.s.} \quad \Leftrightarrow \quad a_1 a_2 > b_1 b_2 \quad \Leftrightarrow \quad \mu_1 \mu_2 < 1$$

dove $\mu_i = b_i / a_i$ è il **guadagno statico** dell'i-esimo sistema.

Esempio [Retroazione con tre sistemi del primo ordine]
In questo caso si può mostrare, utilizzando il criterio di Routh, che il sistema è a.s. se e solo se

$$\mu < \mu^*$$

dove

$$\begin{aligned} \mu &= \mu_1\, \mu_2\, \mu_3 \quad \text{(guadagno d'anello)} \\ \mu^* &= (\tau_1 + \tau_2 + \tau_3)(\tau_1^{-1} + \tau_2^{-1} + \tau_3^{-1}) - 1 \end{aligned}$$

e $\mu_i = b_i/a_i$ e $\tau_i = 1/a_i$ sono il guadagno statico e la costante di tempo dell'i-esimo sistema.

Esempio [Dinamica di un convoglio]

- Un automezzo guida (0) ed n automezzi eguali $1, \ldots, n$
- Velocità nominale v, distanza nominale tra i veicoli L; poniamo $T = L/v$
- Dinamica di ciascun veicolo

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= u - hx_2 \end{aligned}$$

  (h coefficiente di attrito)
- Controllo decentralizzato

$$u_i = hx_2 + \frac{1}{\tau^2} \left(\Delta L_i - T \, \Delta v_i \right)$$

  $i = 1, \ldots, n$; ΔL_i è l'eccesso di distanza dal veicolo che precede; $\Delta v_i = x_2 - v$ (eccesso di velocità); τ costante da progettare

Supponiamo che all'istante $t = 0$ il veicolo guida si blocchi nell'origine e studiamo il comportamento del veicolo 1.

- $x_1(0) < 0$, $x_2(0) > 0$
- $\Delta L_1 = -x_1 - L$ per $t \geq 0$ e

$$u_1 = hx_2 + \frac{1}{\tau^2}\Big(-x_1 - L - T\left(x_2 - v\right)\Big)$$

- sistema a ciclo chiuso

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{1}{\tau^2}\,x_1 - \frac{T}{\tau^2}\,x_2\end{aligned}$$

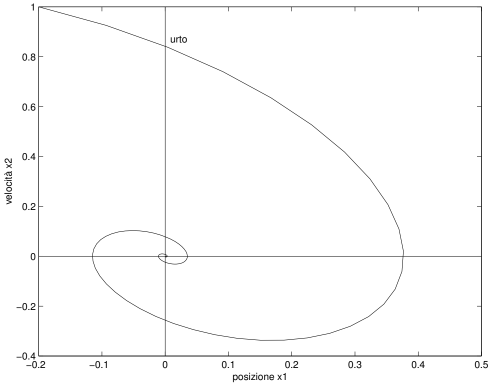
- $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{\tau^2} & -\frac{T}{\tau^2} \end{pmatrix}$

- $p(s) = s^2 + \frac{T}{\tau^2}\,s + \frac{1}{\tau^2}$ è Hurwitz $\forall \tau \Rightarrow$ il **veicolo tende ad arrestarsi**.

Ma **urta il veicolo guida?** Occorre analizzare i modi del sistema al variare di τ. Gli autovalori sono

- reali, per $\tau \leq T/2$
- complessi e coniugati per $\tau > T/2$

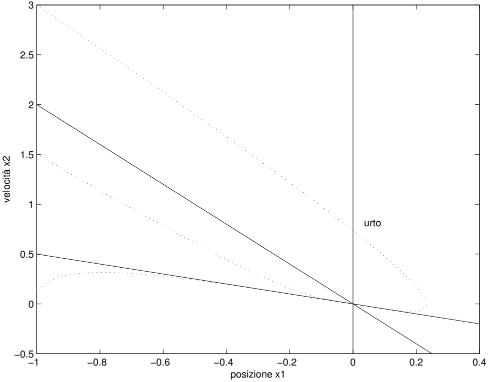
$$T = \frac{1}{2} \quad \tau = \frac{\sqrt{2}}{2}$$



Autovalori complessi e coniugati. L'urto col veicolo guida è inevitabile

Autovalori e autovettori per $T = 2.5$, $\tau = 1$

$$\left[-.5\,,\begin{pmatrix}1\\-.5\end{pmatrix}\right]\text{(dominante)} \qquad \left[-2\,,\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}\right]$$



Autovalori reali. L'urto può o meno avvenire a seconda delle condizioni iniziali

Metodo di Liapunov

Dato il sistema scalare

$$\dot{x} = ax$$

analizziamo come varia la funzione quadratica $V(x) = p\,x^2$ $(p > 0)$ *lungo le traiettorie* del sistema.

$$\begin{aligned}\frac{dV(x(t))}{dt} &= 2p\,x(t)\,\dot{x}(t)\\ &= 2p\,a\,x(t)^2\end{aligned}$$

Se $a < 0$ la derivata è sempre < 0 e il valore di V diminuisce asintoticamente $\Rightarrow x(t) \to 0$.

La stabilità secondo Liapunov

Consideriamo il sistema $\dot{x} = f(x)$ e supponiamo, senza perdita di generalità (perché?), che l'origine sia un punto di equilibrio, cioè $f(0) = 0$.

Definizione

Il punto di equilibrio $x = 0$ è

- **stabile** *se* $\forall \epsilon > 0 \; \exists \delta > 0$ *tale che*

$$\|x(0)\| < \delta \Rightarrow \|x(t)\| < \epsilon \quad \forall t \geq 0$$

- **instabile** *se non è stabile*
- **asintoticamente stabile** *se è stabile e inoltre esiste un* $R > 0$ *tale che*

$$\|x(0)\| < R \Rightarrow \lim_{t \to \infty} x(t) = 0$$

Varie considerazioni sul concetto di stabilità

- La definizione appena vista si adatta subito anche ai **sistemi non lineari t.d.** $x_{t+1} = f(x_t)$.
- Ricordiamo che un sistema lineare è anche un sistema non lineare, mentre il contrario non è vero in generale (sistema non lineare è un'abbreviazione di "sistema non necessariamente lineare").
- La definizione è una generalizzazione di quella introdotta per i sistemi lineari $\dot{x} = Ax$ o $x_{t+1} = Ax_t$. In altri termini se, ad esempio, un sistema lineare è a.s. secondo la definizione specifica per i sistemi lineari, lo è anche nell'accezione generale appena introdotta. Viceversa, se un sistema lineare è a.s. nell'accezione generale, lo è anche in quella specifica dei sistemi lineari.

Attenzione: stabilità del punto di equilibrio!

Per un sistema non lineare occorre in generale parlare di stabilità (o instabilità) di un suo punto di equilibrio mentre per un sistema lineare si può parlare di stabilità del sistema (perché?).
Ciò tra l'altro serve a rimarcare che può accadere che un certo punto di equilibrio di un sistema abbia una certa proprietà di stabilità, e un altro punto di equilibrio dello stesso sistema ne abbia un'altra.

Il metodo diretto di Liapunov

In generale è difficile accertare le caratteristiche di stabilità di (un punto di equilibrio di) un sistema non lineare poiché, secondo la definizione occorre lavorare sulla soluzione dell'equazione e, si sa, solo per i sistemi lineari e per certe forme di equazioni non lineari esistono soluzioni in forma chiusa. È evidente inoltre che il problema aumenta di complessità con l'ordine del sistema, occorre studiare l'andamento di n variabili.
L'idea geniale di Liapunov è stata di riassumere il comportamento di n variabili di stato attraverso una **funzione scalare**, una cosiddetta **funzione di energia**, sempre positiva tranne che nel punto di equilibrio. Se si riesce a dimostrare che questa funzione scalare tende a zero lungo le traiettorie del sistema, allora si può concludere che anche le n variabili di stato tendono a zero, l'unico punto in cui la funzione di energia si annulla.

La derivata lungo una traiettoria di un sistema

Data una funzione derivabile $V : D \to \mathbb{R}$ con $D \subseteq \mathbb{R}^n$ contenente l'origine e il sistema $\dot{x} = f(x)$ è facile

- calcolare **la derivata lungo le traiettorie del sistema**:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V(x(t)) &= \sum_i \frac{\partial V}{\partial x_i} \dot{x}_i(t) \\ &= \frac{\partial V}{\partial x}(x(t))\, f(x(t)) \quad \left(\begin{array}{l}\text{utilizzando la notazione} \\ \text{vettoriale e il gradiente} \\ \text{che è un vettore riga}\end{array}\right) \end{aligned}$$

- notare che se la traiettoria passa in un generico punto $\hat{x}$ la derivata in quel punto vale $\frac{\partial V}{\partial x}(\hat{x}) f(\hat{x})$ e **non occorre calcolare la traiettoria**

La derivata di Liapunov

Definiamo $\boxed{\dot{V}(x) \triangleq \frac{\partial V}{\partial x}(x) f(x)}$ e notiamo che si tratta di uno scalare ottenuto dal prodotto di un vettore riga (il gradiente) per un vettore colonna (il secondo membro dell'equazione differenziale).

Inoltre, anche se il punto sopra la V richiama la derivata rispetto al tempo si noti che il tempo non appare, è del tutto scomparso!

Funzioni definite in segno

Una funzione $V : D \to \mathbb{R}$ si dice

- **semidefinita positiva** se $V(x) \geq 0$ in D
- **definita positiva** se $V(x) > 0$ in $D \backslash \{0\}$ e $V(0) = 0$
- **semidefinita negativa** se $-V$ è s.d.p
- **definita negativa** se $-V$ è d.p.

Talvolta si abbrevia scrivendo $V(x) \geq 0$ per s.d.p., $V(x) > 0$ per d.p., e così via. . .

Il (secondo) metodo di Liapunov

Liapunov

Sia $V > 0$ in $D \subseteq \mathbb{R}^n$. Allora, il punto di equilibrio $x = 0$ è

- **stabile** se $\dot{V} \leq 0$
- **a.s.** se $\dot{V} < 0$

Barbashin-Krasovskii

Se $V > 0$ in $\mathbb{R}^n$, $\dot{V} < 0$ e inoltre

$$\lim_{\|x\| \to \infty} V(x) = \infty \quad \text{(cioè } V \text{ è } \textbf{radialmente illimitata}\text{)}$$

il punto di equilibrio $x = 0$ è **globalmente a.s.**, cioè la regione di asintotica stabilità è tutto lo spazio di stato.

Un importante caveat

È una condizione sufficiente!

Se non riesco a trovare una funzione di Liapunov non posso concludere che il sistema è instabile!

Esempi

Per il sistema scalare $\dot{x} = -g(x)$, con $g(0) = 0$ e $xg(x) > 0$ per $x \neq 0$ è facile verificare che una f.d.L. è

$$V(x) = \int_0^x g(y)\, dy$$

Il pendolo

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2 \\
\dot{x}_2 &= -a \sin x_1 - b x_2
\end{aligned}
$$

con $a, b > 0$. L'energia del pendolo è data da

$$
\begin{aligned}
E(x) &= \int_0^{x_1} a \sin y \, dy + \frac{1}{2} x_2^2 \\
&= a\,(1 - \cos x_1) + \frac{1}{2} x_2^2
\end{aligned}
$$

e dunque

$$
\begin{aligned}
\dot{E}(x) &= a \sin x_1 (x_2) + x_2(-a \sin x_1 - b x_2) \\
&= -b x_2^2 \leq 0 \quad \text{(cioè semidefinita negativa)}
\end{aligned}
$$

Dunque il pendolo è "solo" stabile?!

Per $b = 0$ il pendolo non ha attrito e si ottiene $\dot{E}(x) \equiv 0$, cioè qualunque sia x, $\dot{E}(x) = 0$. Ciò implica che anche lungo le traiettorie del sistema si abbia

$$\dot{E}(x(t)) \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad E(x(t)) \equiv \text{cost}$$

cioè lungo le traiettorie l'energia del pendolo si mantiene costante. Viceversa, le traiettorie del sistema sono date dalle curve di livello della funzione di energia.

Il Metodo di Liapunov per i sistemi lineari

Per il sistema vettoriale

$$\dot{x} = Ax$$

consideriamo la forma quadratica (**funzione di Liapunov** o **funzione di energia**)

$$V(x) = x^T P x \quad (P \text{ simmetrica e} > 0)$$

Allora

$$\begin{aligned} \frac{dV(x(t))}{dt} &= x(t)^T P \dot{x}(t) + \dot{x}(t)^T P x(t) \\ &= x(t)^T (PA + A^T P) x(t) \end{aligned}$$

In altri termini

$$P \quad \xrightarrow{\text{derivazione}} \quad PA + A^T P$$

La stabilità asintotica è assicurata se

$$PA + A^T P < 0$$

Equazione e disequazione di Liapunov

La relazione

$$\boxed{PA + A^T P < 0}$$

è una diseguaglianza lineare matriciale (**Linear Matrix Inequality**, **LMI**) nella incognita $P > 0$. Se, data la A, si trova una soluzione P, allora A è a.s. L'LMI Toolbox può efficacemente determinare una soluzione o stabilire che non esiste.
Il soddisfacimento della suddetta LMI è equivalente al soddisfacimento della **equazione algebrica di Liapunov** (lineare!)

$$\boxed{PA + A^T P = -Q \quad \text{con } Q \text{ simmetrica e } > 0}$$

La matrice A è a.s. se e solo se *per qualunque $Q > 0$ l'equazione algebrica di Liapunov ammette una soluzione $P > 0$.*

Esempio: una funzione che non funziona

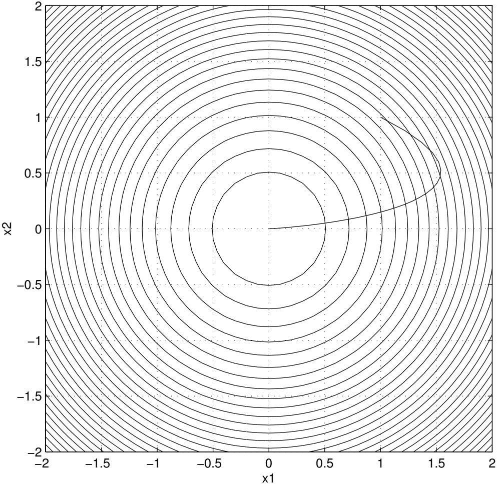
Il sistema $\dot{x} = Ax \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ è a.s., ma la funzione quadratica

$$V_1(x) = x_1^2 + x_2^2 \quad P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

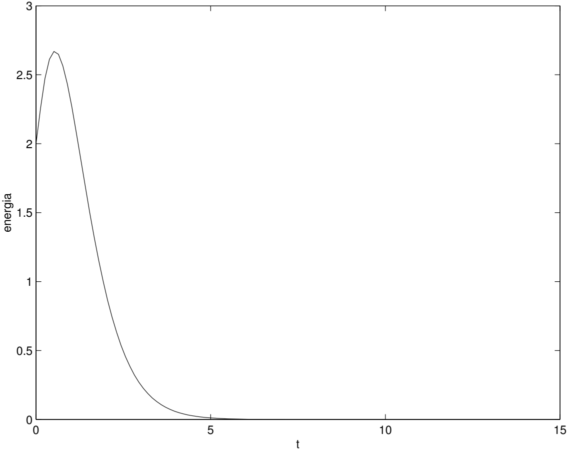
non è una funzione di Liapunov poiché

$$P_1 A + A^T P_1 = -\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

non è definita negativa.



La traiettoria parte da $x_0 = (1\ 1)^T$ e attraversa le curve di livello di V_1

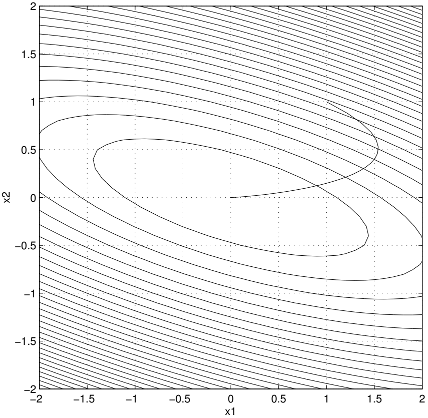


La funzione $V_1(x)$ non è monotona decrescente lungo la traiettoria

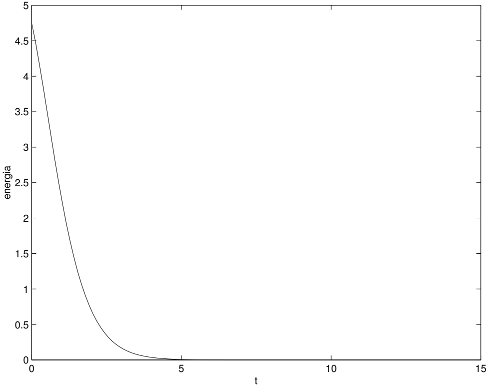
Esempio: una funzione che funziona

Invece la matrice $P_2 = \begin{pmatrix} .5 & .75 \\ .75 & 2.75 \end{pmatrix}$ definisce una funzione di Liapunov poiché risolve

$$P_2 A + A^T P_2 = -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$



Curve di livello di V_2



La funzione $V_2(x)$ è monotona decrescente lungo la traiettoria

Insiemi invarianti

Un insieme G è invariante per un sistema dinamico se ogni taiettoria che parte da G permane in G.

Teorema di La Salle

Sia V una f.d.L. candidata. Sia Ω_s la regione, supposta limitata, dove $V(x) < s$ e $\dot{V} \leq 0$. Sia S l'insieme dei punti in Ω_s dove $\dot{V}(x) = 0$ e sia G il più grande insieme invariante in S. Allora tutte le traiettorie in Ω_s tendono asintoticamente a G.

Metodo di Liapunov t.d.

È dato il sistema t.d. $\boxed{x_{t+1} = f(x_t)}$. Partiamo sempre da una funzione $V(x) > 0$ ma invece delle derivata di Liapunov costruiamo la **differenza di Liapunov**. Prima calcoliamo la differenza lungo una traiettoria e cioè

$$V(x_{t+1}) - V(x_t) = V(f(x_t)) - V(x_t)$$

e constatiamo che non occorre calcolare la traiettoria del sistema t.d., ma basta utilizzare il secondo membro dell'equazione alle differenze. Inoltre, a guardar bene, la differenza dipende dal punto in cui si calcola e non dal tempo; quindi possiamo definire

$$\Delta V(x) \triangleq V(f(x)) - V(x).$$

Il metodo di Liapunov si applica dunque ai sistemi t.d. semplicemente sostituendo ΔV a $\dot{V}$.

Metodo di Liapunov t.d. per sistemi lineari

Sistema t.d. $x(t+1) = Ax(t)$
Funzione d'energia $V(x) = x^T P x$
Variazione di energia dopo un passo

$$\begin{aligned} V(x(t+1)) - V(x(t)) &= V(Ax(t)) - V(x(t)) \\ &= x(t)^T (A^T P A - P) x(t) \end{aligned}$$

Il sistema t.d. è a.s. se esiste P tale che

$$\begin{aligned} P &> 0 \\ A^T P A - P &< 0 \end{aligned}$$

Il sistema t.d. è a.s. *se e solo se* per ogni $Q > 0$ esiste un'unica $P > 0$ tale che

$$A^T P A - P = -Q$$

Stabilità e linearizzazione

Sistema non lineare

$$\dot{x} = f(x) \qquad f(0) = 0$$

Linearizzazione

$$\dot{x} = Ax \qquad A = \frac{\partial f}{\partial x}(0)$$

Se A è a.s., il sistema non lineare è a.s. intorno al punto di equilibrio 0

Risolviamo l'equazione (sappiamo che si può fare perché A è a.s.!)

$$PA + A^T P = -I$$

e usiamo la funzione di Liapunov $V(x) = x^T P x$ lungo le traiettorie del sistema non lineare (ricordiamo che $f(x) = Ax + o(\|x\|)$ con $o(\|x\|)$ infinitesimi di ordine **superiore al primo**):

$$\begin{aligned}
\frac{dV(x(t))}{dt} &= x^T P\, f(x) + f(x)^T P\, x \\
&= x^T (PA + A^T P) x + 2x^T P\, o(\|x\|) \\
&= -\|x\|^2 + 2x^T P\, o(\|x\|) \\
&< 0 \quad \text{intorno all'origine}
\end{aligned}$$

poiché intorno all'origine l'infinitesimo del secondo ordine ($-\|x\|^2$) "batte" quello del terzo ($2x^T P\, o(\|x\|)$).

Esempio [Il pendolo]

Il sistema non lineare con ingresso nullo

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = -\sin x_1 - x_2$$

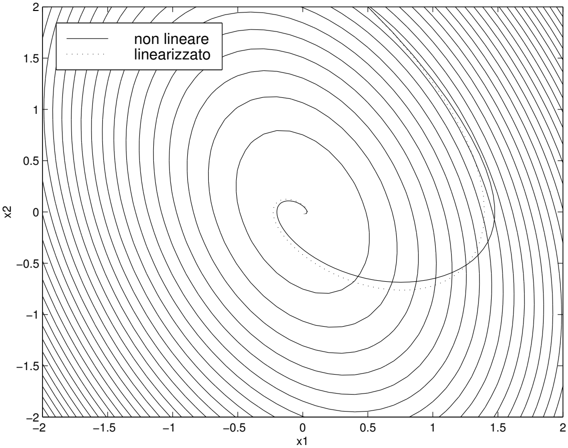
La matrice del sistema linearizzato

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

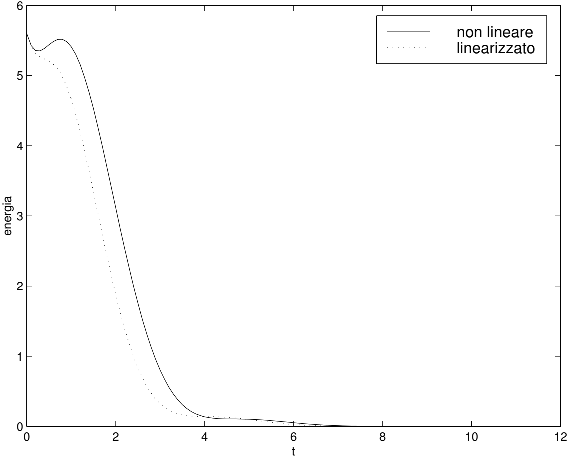
è a.s. $\Rightarrow$ il pendolo è localmente a.s.
La matrice di Liapunov $P = \begin{pmatrix} 2.4 & .5 \\ .5 & 1 \end{pmatrix} > 0$ "funziona" per il sistema linearizzato poiché

$$PA + A^T P < 0$$

ma, lontano dall'origine non funziona per il sistema originario.



Traiettorie del pendolo e della sua linearizzazione attraverso le curve isoenergetiche

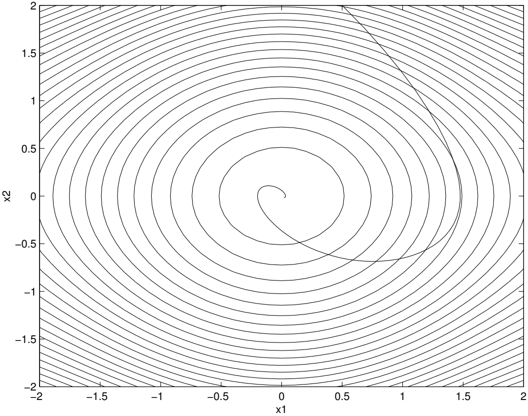


L'energia decresce per il sistema linearizzato ma non per quello non lineare

Il criterio di Liapunov è solo sufficiente!

La funzione di energia del pendolo è

$$\boxed{V(x_1, x_2) = 1 - \cos x_1 + \frac{1}{2}\, x_2^2}$$



Traiettorie del pendolo attraverso la sua funzione di energia

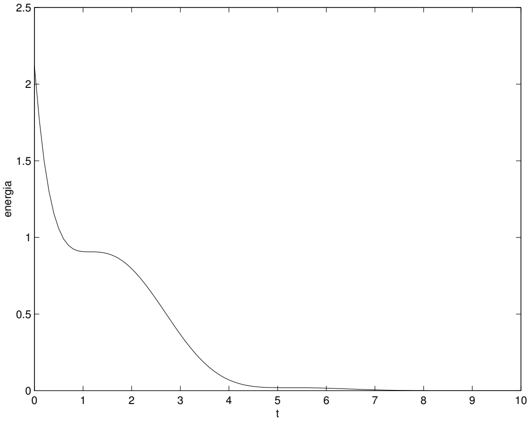


Diagramma orario dell'energia

Il pendolo è globalmente a.s.

Stabilità di sistemi meccanici

Una classe generale di sistemi meccanici

$$M\ddot{q} + C\dot{q} + Kq = 0$$

- $q \in \mathbb{R}^N$ coordinate generalizzate
- $M^T = M > 0$ matrice d'inerzia;
  energia cinetica $= \frac{1}{2}\,\dot{q}^T M \dot{q}$
- K matrice di rigidezza. Sia $K^T = K > 0$;
  energia potenziale $= \frac{1}{2}\,q^T K q$
- C matrice di smorzamento

In forma di stato

$$x = \begin{pmatrix} q \\ \dot{q} \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -M^{-1}K & -M^{-1}C \end{pmatrix}$$

Energia totale

$$\begin{aligned} V(x) &= \frac{1}{2}\, q^T K q + \frac{1}{2}\, \dot{q}^T M \dot{q} \\ &= x^T P x \quad \text{con } P = \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} K & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Dalla derivazione otteniamo

$$PA + A^T P = -\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

e dunque

$$C^T = C \geq 0 \quad \iff \quad PA + A^T P \leq 0$$

(è una condizione **più debole** di $PA + A^T P < 0$

$$\boxed{K > 0 \text{ e } C \geq 0 \text{ implicano } \textbf{stabilità marginale}}$$

Un'altra funzione di Liapunov

Supponiamo

$$K^T = K > 0 \qquad C^T = C > 0$$

e prendiamo

$$P = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} K + \epsilon C & \epsilon M \\ \epsilon M & M \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} K & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix} + \frac{\epsilon}{2}\begin{pmatrix} C & M \\ M & 0 \end{pmatrix}$$

- $P > 0$ per $\epsilon > 0$ sufficientemente piccolo

Ora

$$PA + A^T P = -\begin{pmatrix} \epsilon K & 0 \\ 0 & C - \epsilon M \end{pmatrix} < 0$$

per ϵ sufficientemente piccolo.
Dunque

$$\boxed{K > 0 \text{ e } C > 0 \text{ implicano } \textbf{a.s.}}$$

Il metodo delle simulazioni

Il sistema è a.s. se tutte le n traiettorie ottenute a partire da altrettante condizioni iniziali linearmente indipendenti (ad esempio, e_i, per $i = 1, \ldots, n$) tendono a zero.
In effetti se la condizione iniziale viene scelta a caso e la corrispondente traiettoria tende a zero, il sistema è a.s. con probabilità 1. (Infatti in tal caso con probabilità 0 il sistema possiede un modo instabile che non è stato eccitato.)

Stabilità esterna

Si riferisce alla definizione esterna dei sistemi e quindi alla sola relazione ingresso-uscita.

Un sistema lineare (A, B, C, D) è **esternamente stabile** (o **stabile BIBO**, Bounded-Input Bounded-Output) se, con condizioni iniziali nulle,

$$u \text{ limitato} \quad \Rightarrow \quad y \text{ limitato}$$

- Non c'è perdita di generalità perché se il sistema è **raggiungibile** può essere posizionato in qualunque stato con un ingresso limitato in un tempo limitato
- Non può portare in conto l'effetto di ingressi parassitici (ma lo fa la stabilità interna)

Il sistema (A, B, C, D) è stabile BIBO *se e solo se*

$$\int_0^{\infty} \|W(t)\|\, dt < \infty \text{ (t.c.)}$$

$$\sum_{t=0}^{\infty} \|W(t)\| < \infty \text{ (t.d.)}$$

La stabilità interna implica quella esterna—sostanzialmente perché l'uscita è un'integrale (o sommatoria) di risposte impulsive

Viceversa la stabilità esterna implica la stabilità interna della parte raggiungibile-osservabile del sistema