Esercitazione – Matlab

Giovanni Palmieri
24-01-2007

Università degli Studi del Sannio
Dipartimento di Ingegneria

Grace
Group for Research on Automatic Control Engineering

Università degli Studi del Sannio

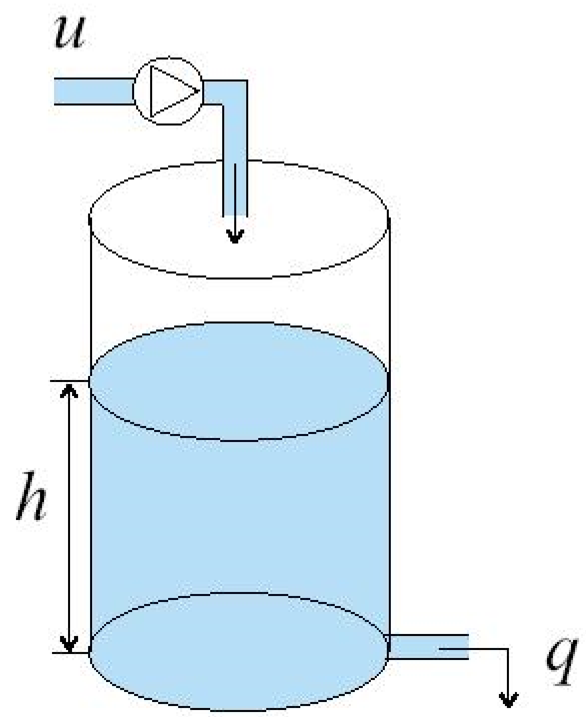
Rappresentazione dei sistemi nello spazio di stato

Variabili

Altezza serbatoio	H	m
Flusso di ingresso	U	m^3/s
Flusso di uscita	Q	m^3/s
Velocità di uscita	V	s

Parametri

Sezione serbatoio	A	m^2
Sezione apertura	a	m^2
Accellerazione di gravità	g	$m^{/s}$



Leggi della fisica

$v(t) = \sqrt{2gh(t)}$ Legge di Torricelli

$q(t) = av(t)$ Flusso di massa

$\frac{d}{dt}\left[Ah(t)\right] = u(t) - q(t)$ Bilancio di massa

Calcolo del punto di equilibrio

- Il modello tempo continuo è:

$$\frac{d}{dt}h(t) = -\frac{a\sqrt{2g}}{A}\sqrt{h(t)} + \frac{1}{A}u(t)$$

$$q(t) = a\sqrt{2g}\sqrt{h(t)}$$

- Calcoliamo il punto di equilibrio per un ingresso costante u_r

$$\frac{d}{dt}h(t) = 0 = -\frac{a\sqrt{2g}}{A}\sqrt{h_r} + \frac{1}{A}u_r \Rightarrow h_r = \frac{1}{2g}\left(\frac{u_r}{a}\right)^2$$

Sistema linearizzato

$$A \equiv \frac{\partial}{\partial h}\left(\frac{a\sqrt{2g}}{A}\sqrt{h}+\frac{1}{A}u\right)\Bigg|_{h_r,u_r} = -\frac{a^2 g}{Au_r}$$

$$B \equiv \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{a\sqrt{2g}}{A}\sqrt{h}+\frac{1}{A}u\right)\Bigg|_{h_r,u_r} = \frac{1}{A}$$

$$C \equiv \frac{\partial}{\partial h}\left(a\sqrt{2g}\sqrt{h}\right)\Big|_{h_r,u_r} = \frac{a^2 g}{u_r}$$

$$D \equiv \frac{\partial}{\partial u}\left(a\sqrt{2g}\sqrt{h}\right)\Big|_{h_r,u_r} = 0$$

system=ss(A,B,C,D);

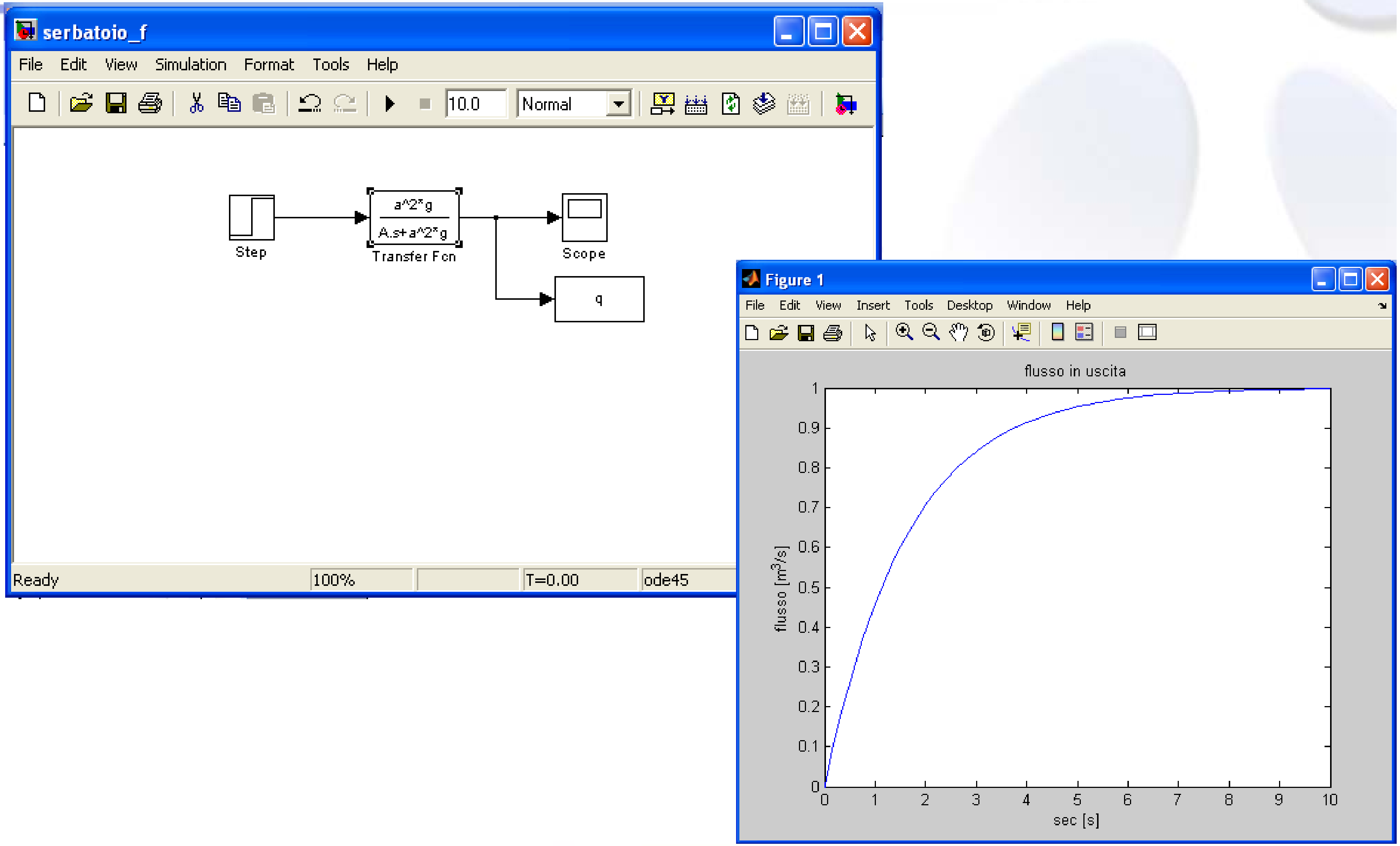
Trasformazione ingresso-uscita

$$\dot{y}(t) = -\frac{a^2 g}{A} \cdot y(t) + a^2 g \cdot u(t)$$

- Nel dominio di Laplace

$$Y(s) = \left(\frac{a^2 g}{As + a^2 g} \right) U(s)$$

Simulink



serbatoio_f
File Edit View Simulation Format Tools Help
10.0
Normal
Step
a^2*g
A.s+a^2*g
Transfer Fcn
Scope
q
Ready
100%
T=0.00
ode45
Figure 1
File Edit View Insert Tools Desktop Window Help
flusso in uscita
flusso [m^3/s]
sec [s]

Analisi in frequenza

$$u(t) = \sin \omega t \longrightarrow \boxed{\frac{a^2 g}{As + a^2 g}} \longrightarrow y(t)$$

- Il sistema è asintoticamente stabile avendo G(s)polo reale negativo:

$$p_1 = -0.61$$

- La risposta a regime permanente:

$$y = u_r |G(j\,\omega)| \sin(\omega t - \angle G(j\,\omega))$$

Bode

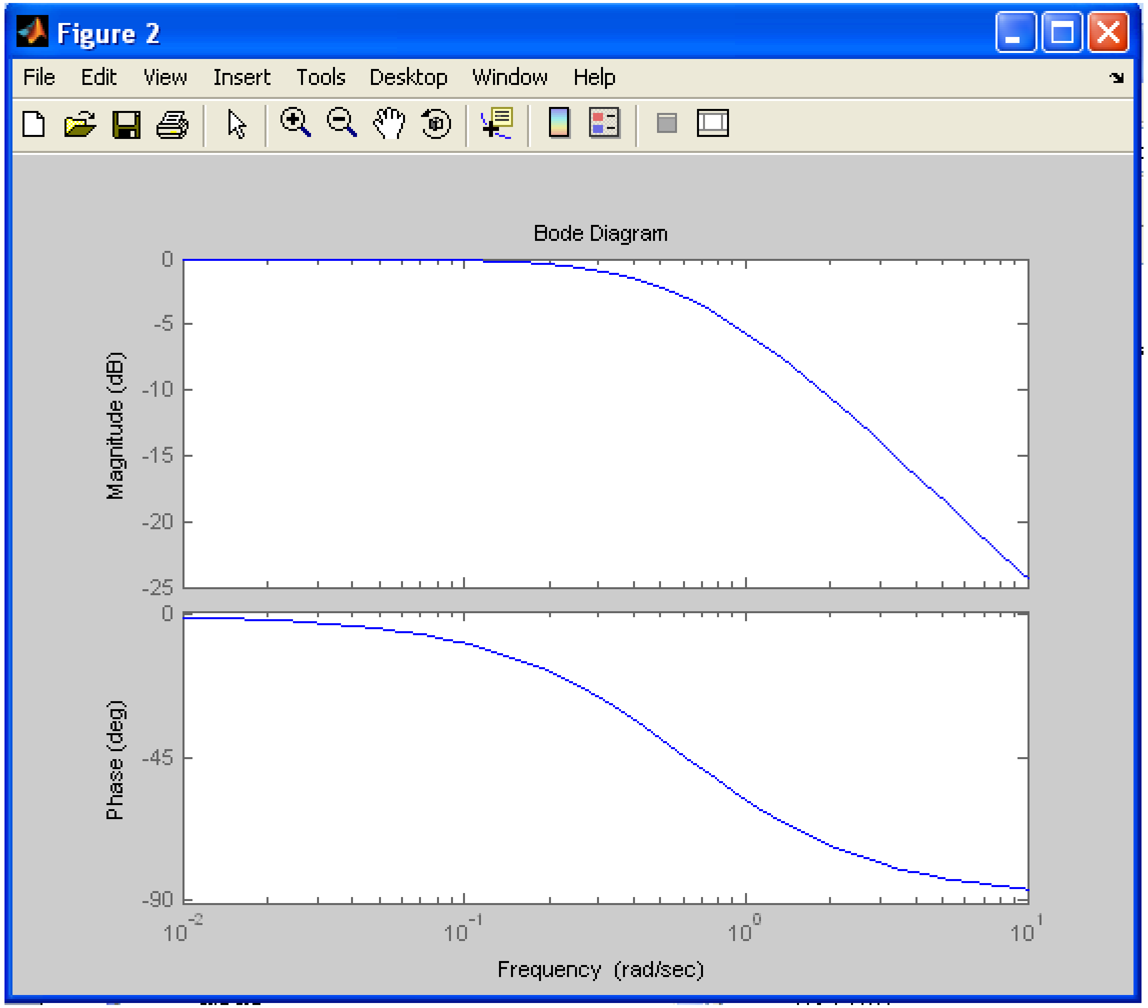
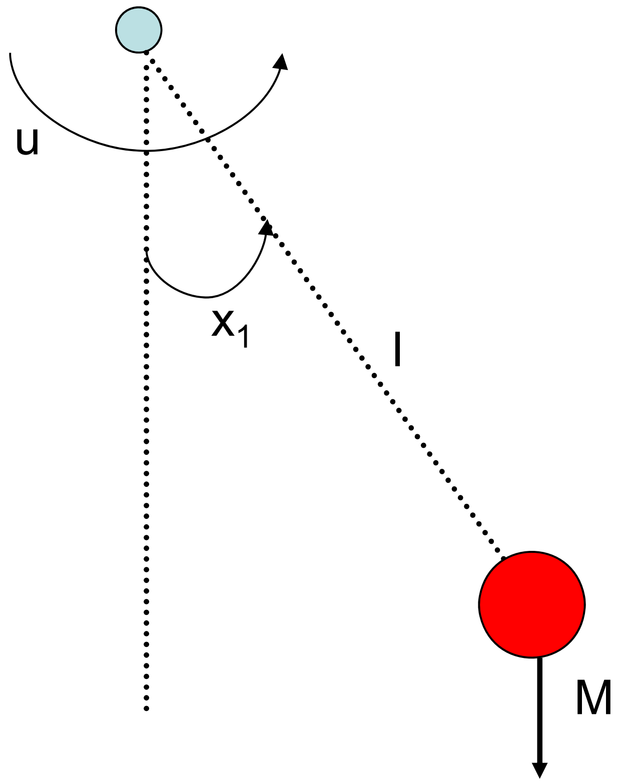


Figure 2
File Edit View Insert Tools Desktop Window Help
Bode Diagram
Magnitude (dB)
0
-5
-10
-15
-20
-25
Phase (deg)
0
-45
-90
10^-2
10^-1
10^0
10^1
Frequency (rad/sec)

Risposta a regime

- Poiché il sistema non ha poli sull'asse immaginario ed è esternamente stabile, all'ingresso $u(t) = 10+3$ sen $(0.5\ t)$ corrisponde, a transitorio esaurito,
- l'uscita $y(t) = 10G(0) + 3\ |G(0.5j)|$ sen $(0.5\ t + \arg G(0.5j))$.
- Valutiamo $G(0)$, $|G(0.5j)|$ e arg $G(0.5j)$ con il comando *bode*.
  - » [mod,arg,puls]=bode(num,den,0)
- Da cui G(0)=1;
  - » [mod,arg,puls]=bode(num,den,0.5)
- da cui $|G(0.5j)| = 0.77$ e arg $G(0.5j) = -39$
- confronta con i diagrammi di Bode tracciati
- $\log_{10}(0.77) = -0.11$

Pendolo



- Il pendolo in figura è costituito da un corpo puntiforme di massa M collegato mediante un asta rigida di lunghezza l e massa trascurabile ad una cerniera; esso si muove in un piano verticale
- L'ingresso u è costituito da una coppia motrice applicata, l'uscita è la posizione angolare y

Costruzione del modello

- Se inizialmente il pendolo non si trova sulla verticale dal punto in cui è incernierato, la massa tende ad oscillare per effetto del suo peso, contrastata dall'attrito rotazionale della fune. Al generico istante di tempo t, gli archi corrispondenti ad una rotazione θ(t) valgono evidentemente s(t)=Lθ(t), da cui consegue che ad un angolo θ(t) corrisponde una accelerazione angolare $d^2\theta$ ed una accelerazione lineare $d^2s(t) = L\, d^2\theta(t)$. Applicando la prima legge di Newton alla massa si ottiene dunque

$$m\ddot{s}(t) = -mg\sin\vartheta(t) - B\dot{s}(t) + u(t)$$

- Dove i segni delle forze in gioco sono negativi poiché tendono a muovere il pendolo in una direzione contraria a quella positiva della posizione e della velocità (che sono positive in senso orario). L'espressione

$$-B\dot{s}(t) = -BL\dot{\vartheta}(t)$$

- Descrive la forza di attrito rotazionale cui è sottoposta la fune, negativa anch'essa poiché tende a frenare il moto. In definitiva si ha la seguente equazione

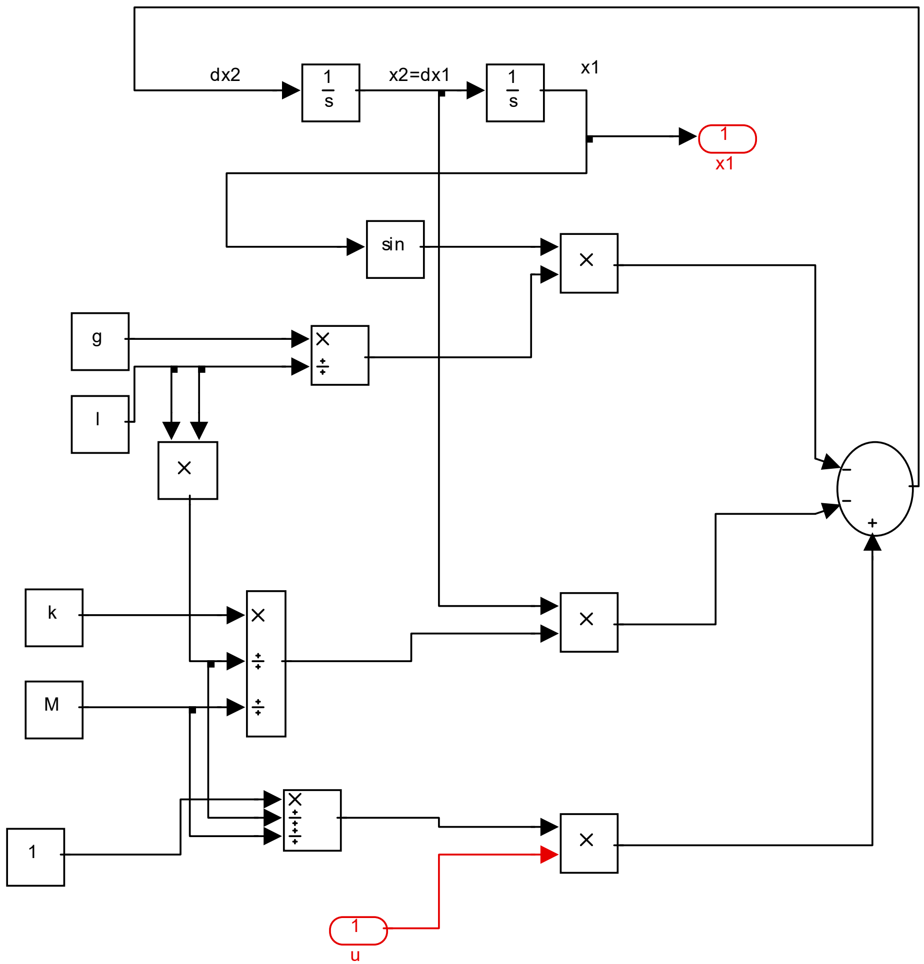
$$mL\ddot{\vartheta}(t) = -mg\sin\vartheta(t) - BL\dot{\vartheta}(t) + u(t)$$

- Supponiamo che il sistema presenti i seguenti dati:

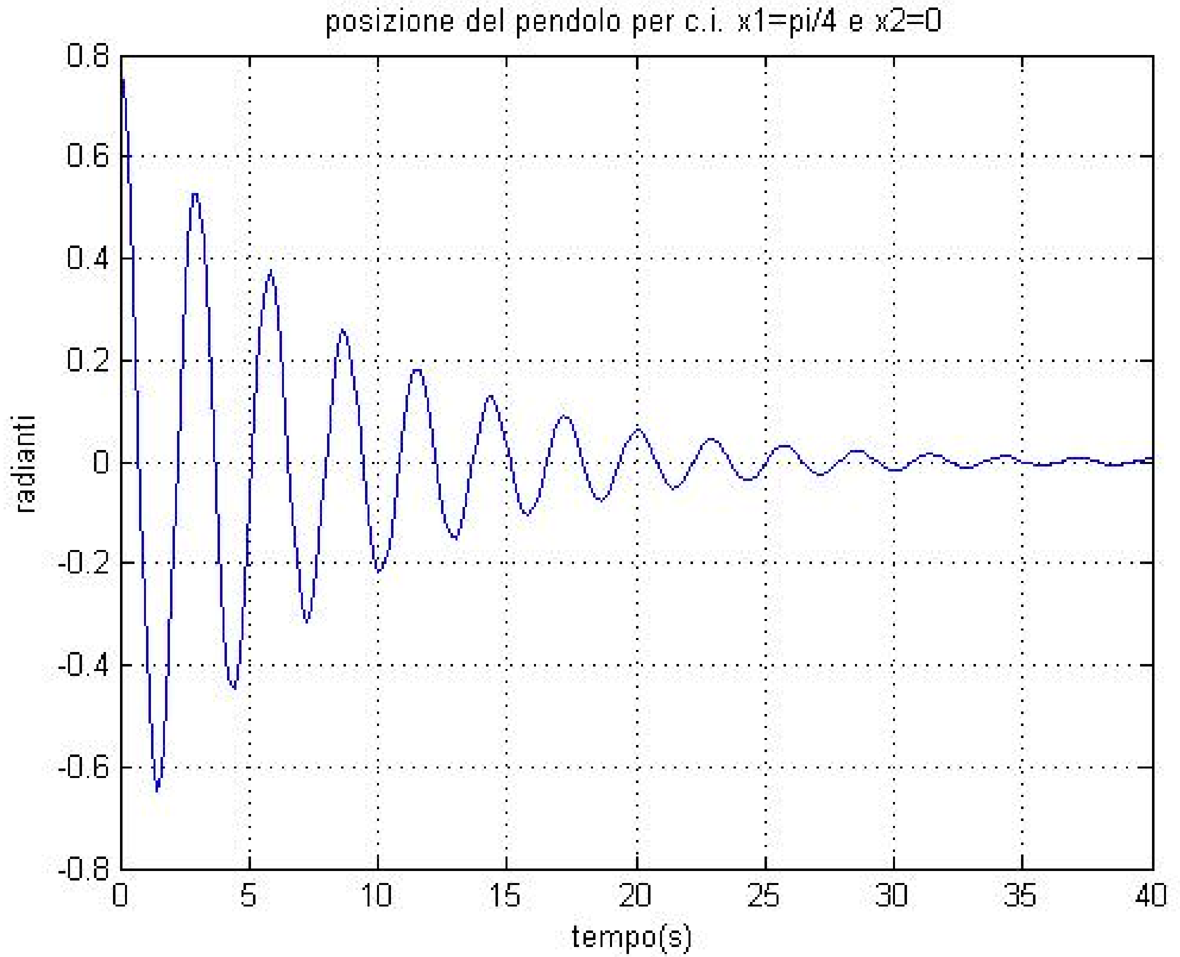
L=2m
M=2.5 Kg
G=9.8 m/s2
k=1.5 Nms/rad

Simulazione

- Il modello Simulink della dinamica del pendolo (u=0)



Ingresso nullo e c.i. x(0)=[pi/4 0]



Sistema lineare approssimato

- Per piccoli angoli si può approssimare sinθ=θ, quindi il sistema assume una forma lieare:

$$mL\ddot{\vartheta}(t) = -mg\vartheta(t) - BL\dot{\vartheta}(t) + u(t)$$

- Ponendo θ=y si ottiene

$$mL\ddot{y}(t) + BL\dot{y}(t) + mgy(t) = u(t)$$

- Nel dominio di Laplace

$$Y(s) = \frac{1/mL}{s^2 + B/M\, s + g/L} U(s)$$

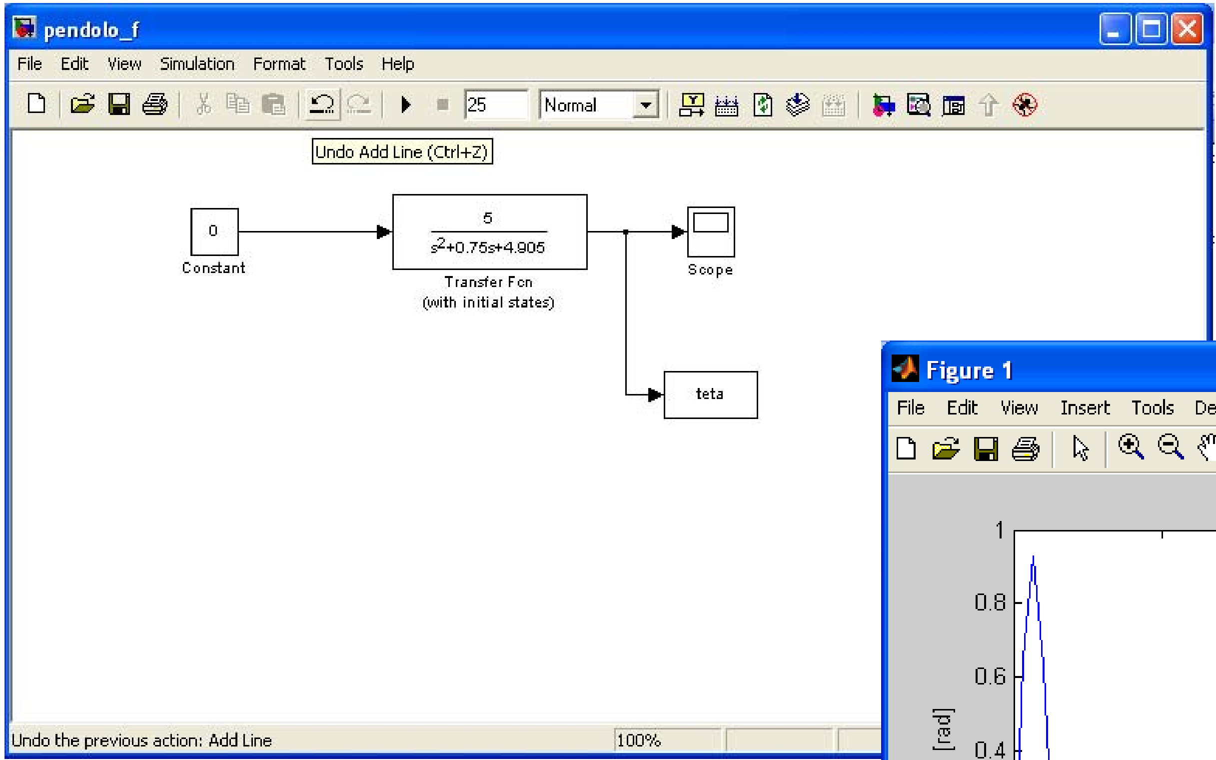
$\mathrm{L} = 2\mathrm{m}$

$\mathrm{M} = 2.5\ \mathrm{Kg}$

$\mathrm{G} = 9.8\ \mathrm{m/s2}$

$\mathrm{B} = 1.5\ \mathrm{Nms/rad}$

Simulink



pendolo_f
File Edit View Simulation Format Tools Help
25
Normal
Undo Add Line (Ctrl+Z)
0
Constant
5
s^2+0.75s+4.905
Transfer Fcn
(with initial states)
Scope
teta
Undo the previous action: Add Line
100%

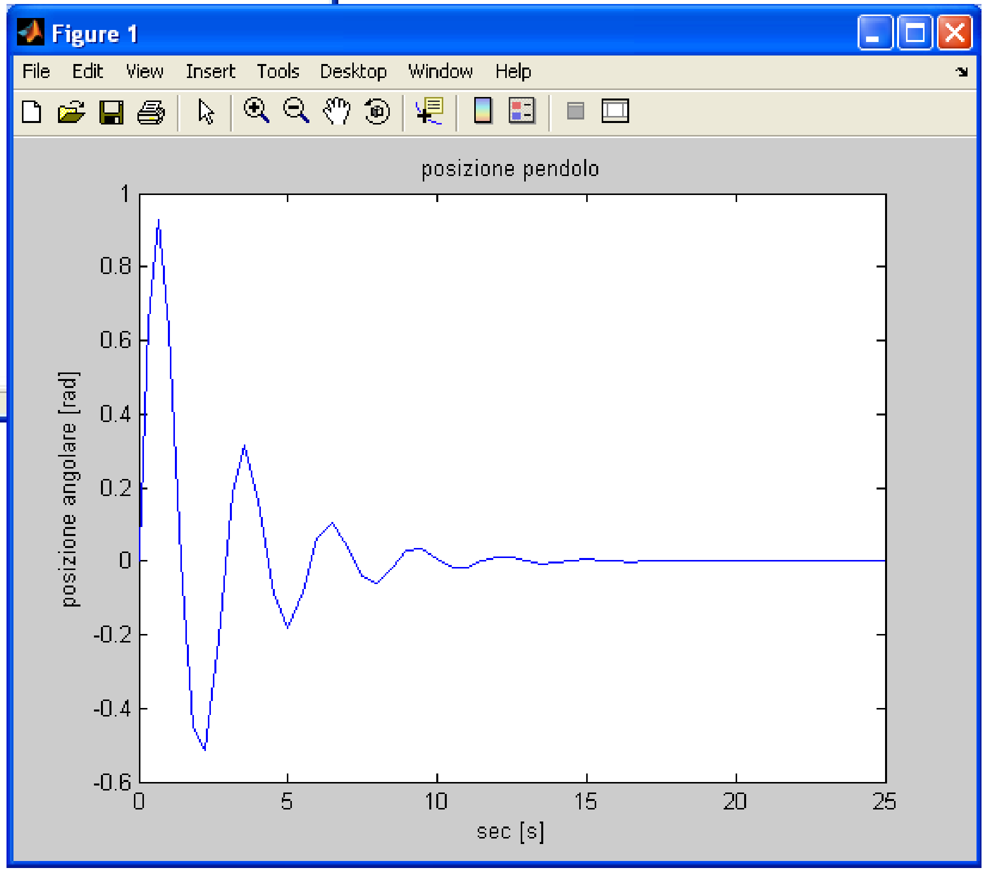
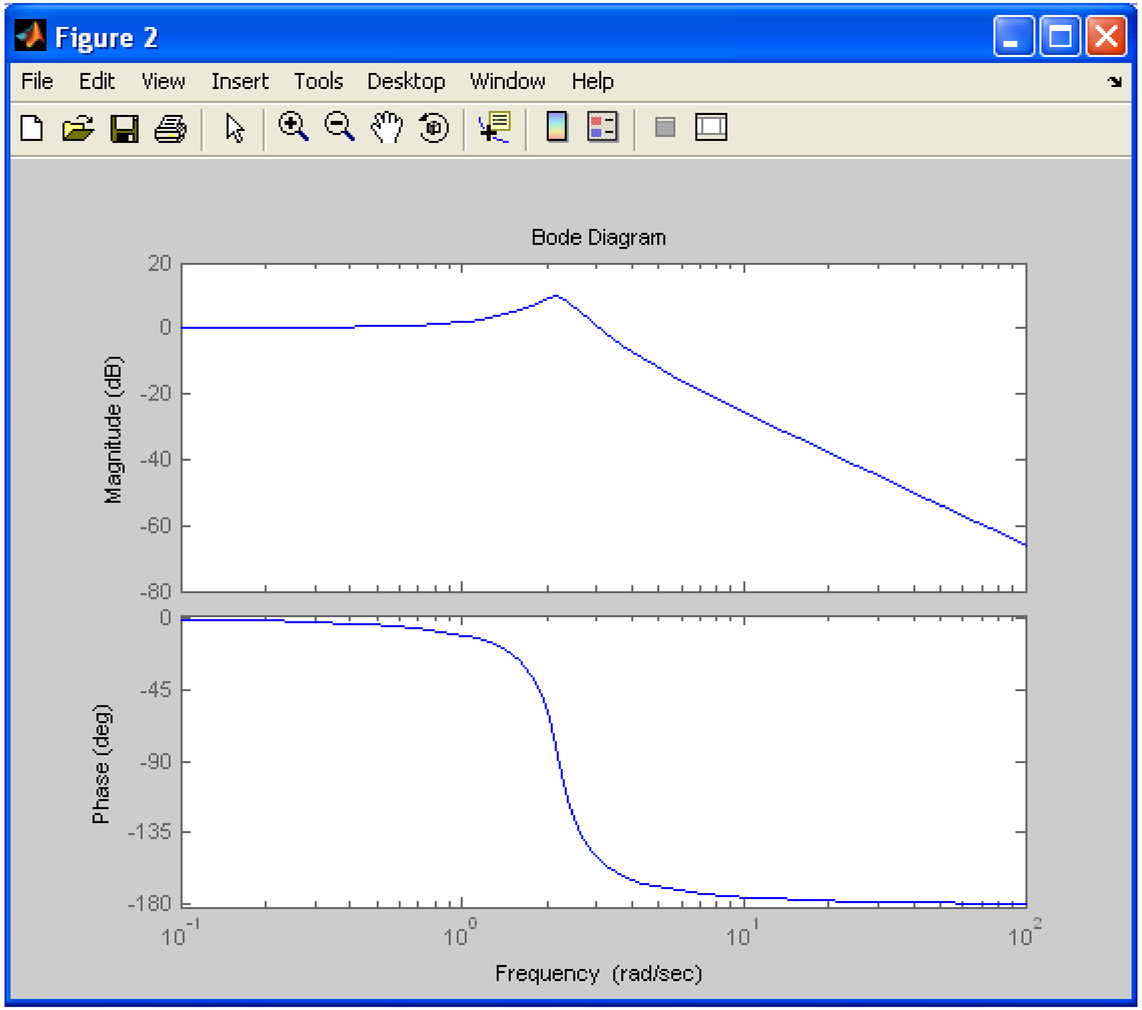


Figure 1
File Edit View Insert Tools Desktop Window Help
posizione pendolo
posizione angolare [rad]
sec [s]
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
0
5
10
15
20
25

Analisi in frequenza



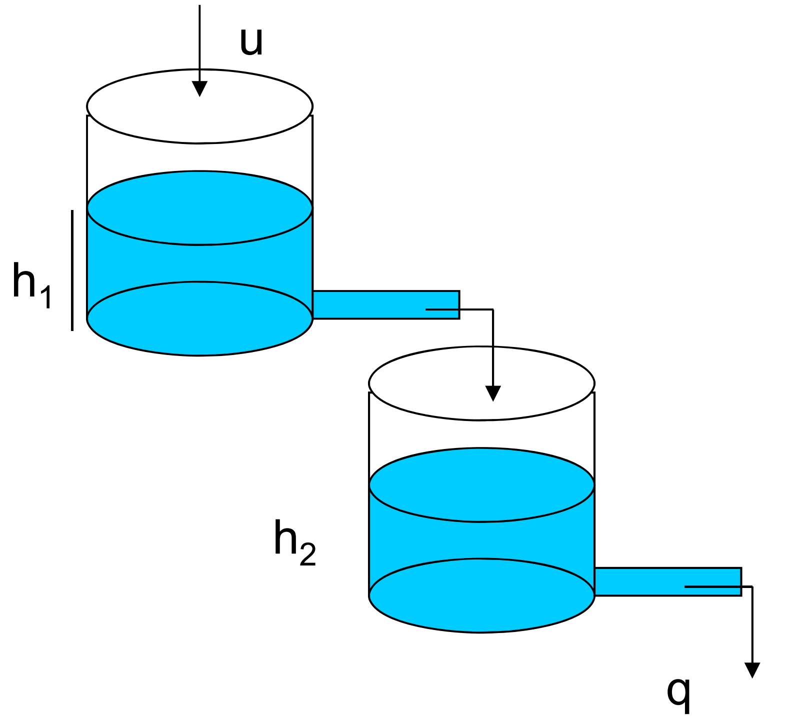
Serbatoi in cascata

Il modello matematico del sistema
è il seguente:

$$\dot{h}_1(t) = \frac{1}{\rho A}\left(u - \frac{1}{R}\sqrt{\rho g h_1}\right)$$

$$\dot{h}_1(t) = \frac{1}{\rho A}\left(\frac{1}{R}\sqrt{\rho g h_1} - \frac{1}{R}\sqrt{\rho g h_2}\right)$$

$$q = \frac{1}{R}\sqrt{\rho g h_2}$$



Linearizzazione per u=1

- Per u=1 all'equilibrio si ha

$$0 = \frac{1}{\rho A}\left(1 - \frac{1}{R}\sqrt{\rho g \hat{h}_1}\right)$$

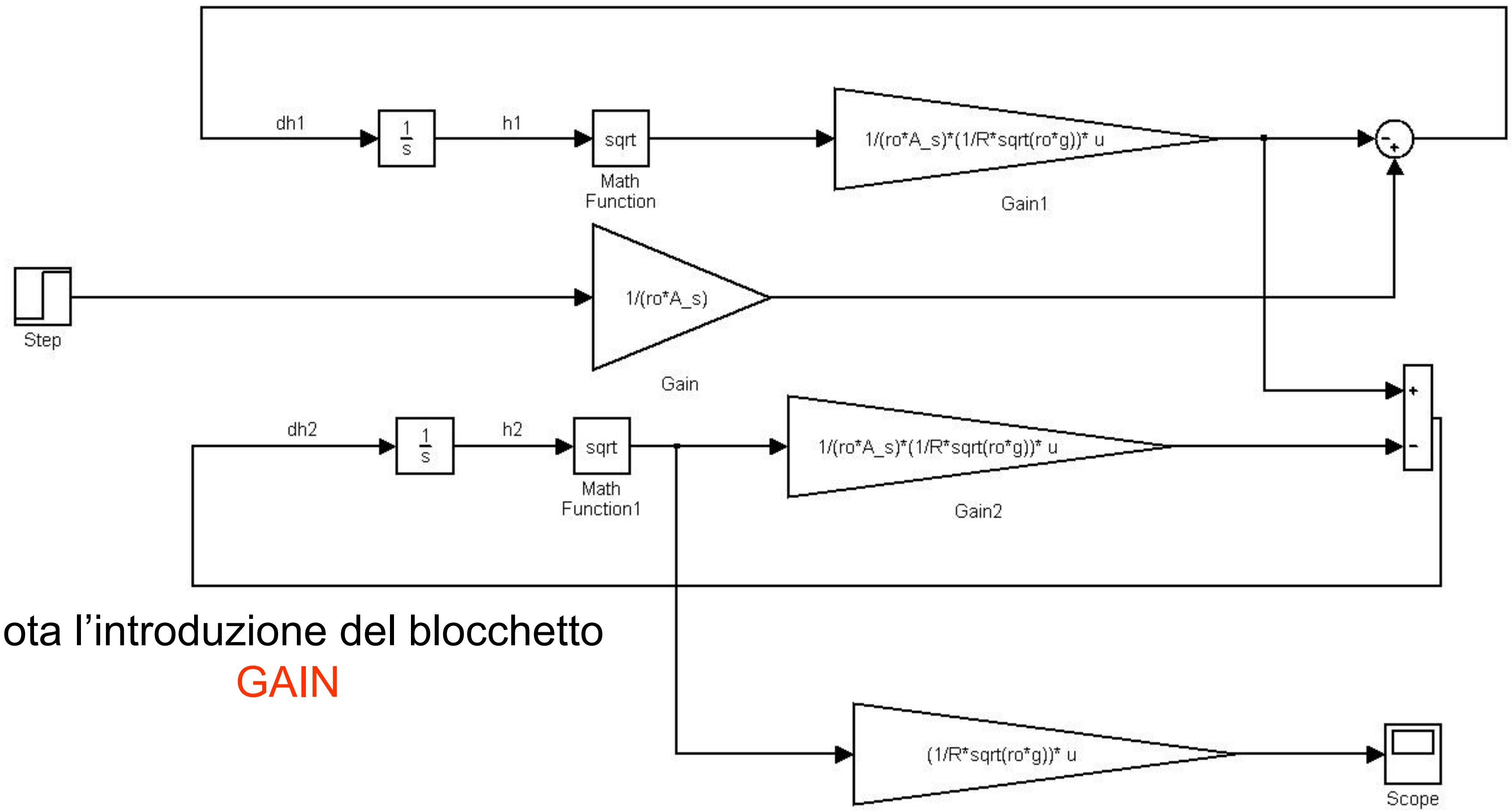
$$0 = \frac{1}{\rho A}\left(\frac{1}{R}\sqrt{\rho g \hat{h}_1} - \frac{1}{R}\sqrt{\rho g \hat{h}_2}\right)$$

$$q = \frac{1}{R}\sqrt{\rho g \hat{h}_2}$$

- con

$$\hat{h} = \begin{bmatrix} \hat{h}_1 \\ \hat{h}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{u^2 R^2}{\rho g} \\ \dfrac{u^2 R^2}{\rho g} \end{bmatrix}$$

Modello Simulink

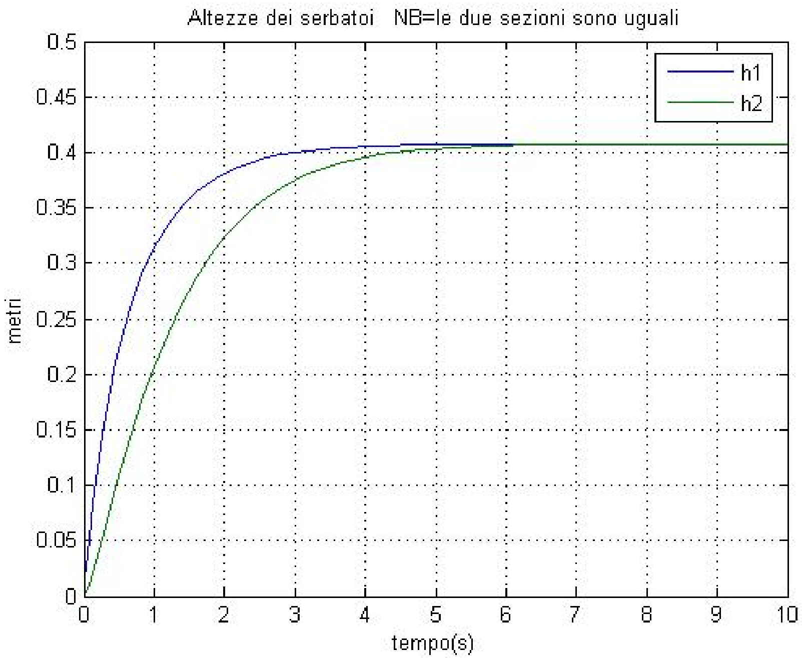


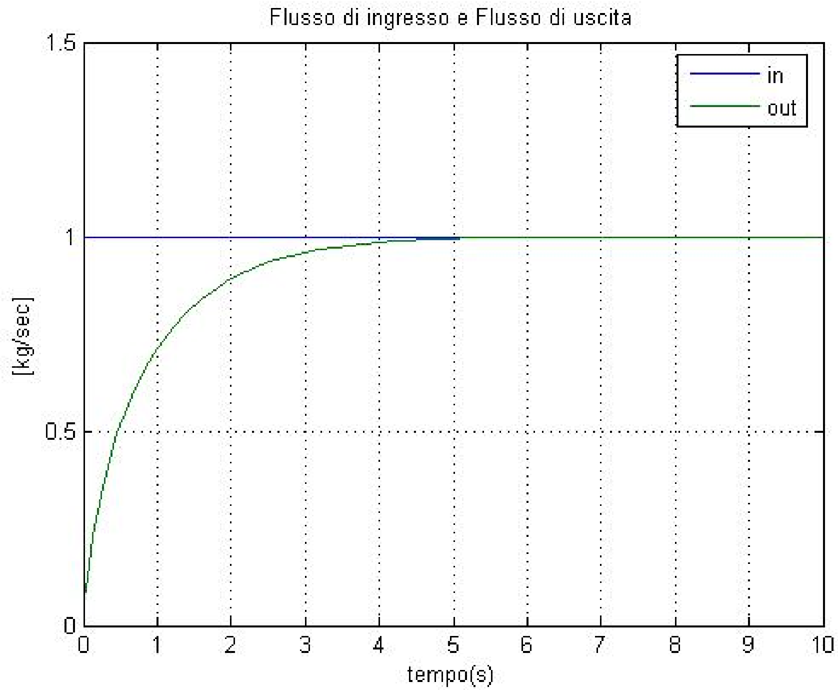
Nota l'introduzione del blocchetto
GAIN

Risultati simulazione

- Utilizzando i seguenti dati in ingresso:

  ro=1 [Kg/m^3]; R=2 [$Kg^{0.5}$]; u=1Kg/s; g=9.81 m/s^2; A_s=1 m^2
- Si ottiene:





Calcolo il punto di equilibrio

- Annullando la derivata si ottiene

$$0 = \frac{1}{\rho A}\left(1 - \frac{1}{R}\sqrt{\rho g \hat{h}_1}\right)$$

$$0 = \frac{1}{\rho A}\left(\frac{1}{R}\sqrt{\rho g \hat{h}_1} - \frac{1}{R}\sqrt{\rho g \hat{h}_2}\right)$$

$$q = \frac{1}{R}\sqrt{\rho g \hat{h}_2}$$

- con

$$\hat{h} = \begin{bmatrix} \hat{h}_1 \\ \hat{h}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{u^2 R^2}{\rho g} \\ \dfrac{u^2 R^2}{\rho g} \end{bmatrix}$$

Sistema linearizzato

$$A \equiv \frac{\partial}{\partial h}\left(\dot{h}\right)\Big|_{h_r, u_r} = \begin{bmatrix} -\dfrac{g}{2AsR^2} & 0 \\ -\dfrac{g}{2AsR^2} & \dfrac{g}{2AsR^2} \end{bmatrix}$$

$$B \equiv \frac{\partial}{\partial u}\left(\dot{h}\right)\Big|_{h_r, u_r} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{\rho A} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C \equiv \frac{\partial}{\partial h}\left(\frac{1}{R}\sqrt{\rho g h_2}\right)\Bigg|_{h_r, u_r} = [0 \quad \frac{\rho g}{2R^2}]$$

$$D \equiv \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{R}\sqrt{\rho g h_2}\right)\Bigg|_{h_r, u_r} = 0$$

system=ss(A,B,C,D);

Risultati Simulazione